**Метод Зейделя**

**Основная идея метода:** на каждом шаге итерационного процесса при вычислении значения учитываются уже полученные значения .

При рассмотрении развернутой формы системы итерационный процесс записывается в виде:



***Замечание:***условия сходимости для простой итерации остаются верными для итерации по методу Зейделя.

А именно:

*Процесс итерации для СЛАУ сходится к единственному ее решению, если какая-нибудь норма матрицы* α *меньше единицы, т.е. для итерационного процесса достаточное условие есть* 

Процесс итерации для СЛАУ сходится, если:

1)  < 1;

2) ;

3)  (Евклидова метрика).

Для CЛАУ процесс итерации сходится, если выполнены неравенства:

1. 

или

1. ,

где штрих у знака суммы означает, что при суммировании пропускаются значения *i*=*j*, т.е. сходимость имеет место, если модули диагональных элементов матрицы *А* СЛАУ или для каждой строки превышают сумму модулей недиагональных элементов этой строки, или же для каждого столбца превышают сумму модулей недиагональных элементов этого столбца.

Таким образом, точное решение системы получается лишь в результате бесконечного процесса, и всякий вектор-столбец ***x***(k)из полученной последовательности является приближенным решением.

Для системы размерности nn метод итерации сходится, если выполняется неравенство |*аij*| *>*|*аij*|, *ij*, *i*=1,..,*п,* т.е. если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффицнентов (не считая свободных членов).

**Условие прекращения итераций:**

, где Ɛ>0 – заданная точность, которую необходимо достигнуть при решении задачи, или более простого условия:

.

Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации, но приводит к более громоздким вычислениям.

***Замечания.***

1. Если итерационный процесс сходится достаточно быстро, т.е. если для решения систем требуется менее *п* итераций, то получаем выигрыш во времени по сравнению с методом Гаусса.

2. Погрешность округления в методе итераций сказывается значительно меньше, чем в методе Гаусса. Кроме того, метод итераций является самоисправляющимся, т. е. отдельная ошибка, допущенная в вычислениях, не отражается на окончательном результате, так как ошибочное приближенне можно рассматривать как новый начальный вектор.

3. Метод простой итерации особенно удобен при решении систем, у которых значительное число коэффициентов равно нулю.

4. В качестве нулевого приближения *x (0)* можно принимать столбец свободных членов.

**Пример:**

Методом Зейделя решить систему уравнений



Заметим, что **диагональные коэффициенты преобладают**, значит условие сходимости метода выполнено

*Решение*.

Приведем эту систему к виду, удобному для итерации (делим каждое уравнение на 10):



где , .

Заметим, что , т.е. условие сходимости метода выполняется.

В качестве нулевых приближений корней возьмем:



Применяя процесс Зейделя, последовательно получим:





Результаты вычислений с точностью до четырех знаков приведены в таблице.

**Таблица 1** Нахождение корней СЛАУ методом Зейделя

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *i* |  |  |  |
| 0 | *1,2000* | *0,0000* | *0,000* |
| 1 | *1,2000* | *1,0600* | *0,9480* |
| 2 | *0,9992* | *1,0054* | *0,9991* |
| 3 | *0,9996* | *1,0001* | *1,0001* |
| 4 | *1,000* | *1,000* | *1,000* |

Точные значения корней: *х*1 = 1; *х*2 = 1; *х*3 = 1.

*Ответ: х*1 = 1; *х*2 = 1; *х*3 = 1.